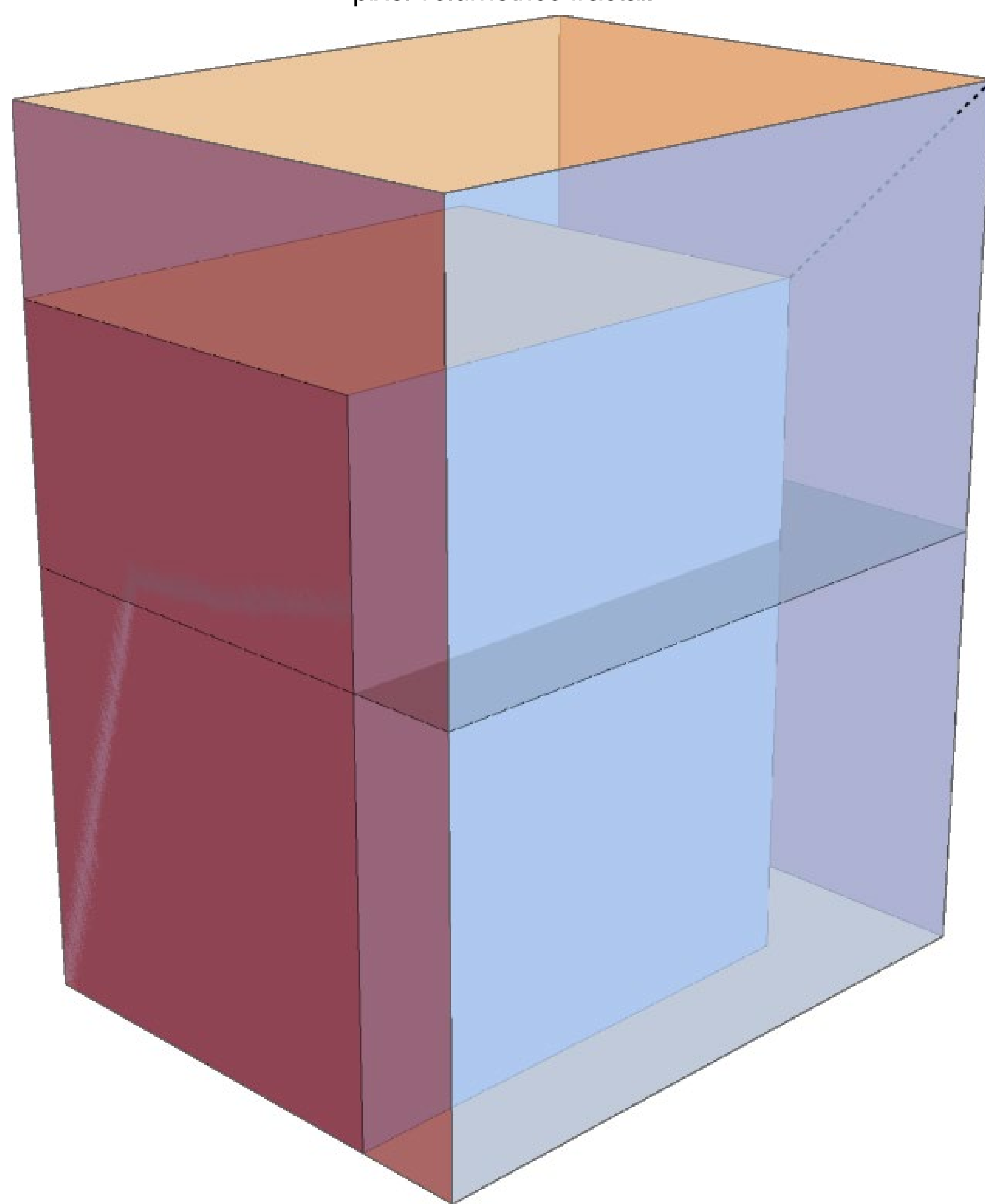
Fravoxel

Proposición de resolución al problema de la duplicación del cubo y su aplicación como pixel volumétrico fractal.



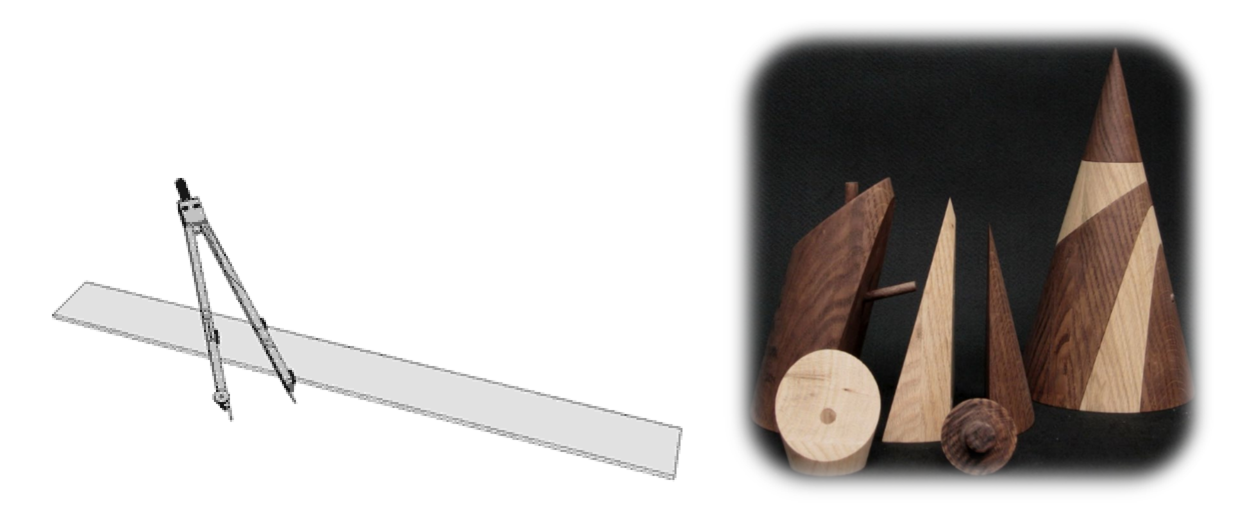
Alejandro José Muñoz Morán

Martes, 25 de febrero de 2020, 15:00:00

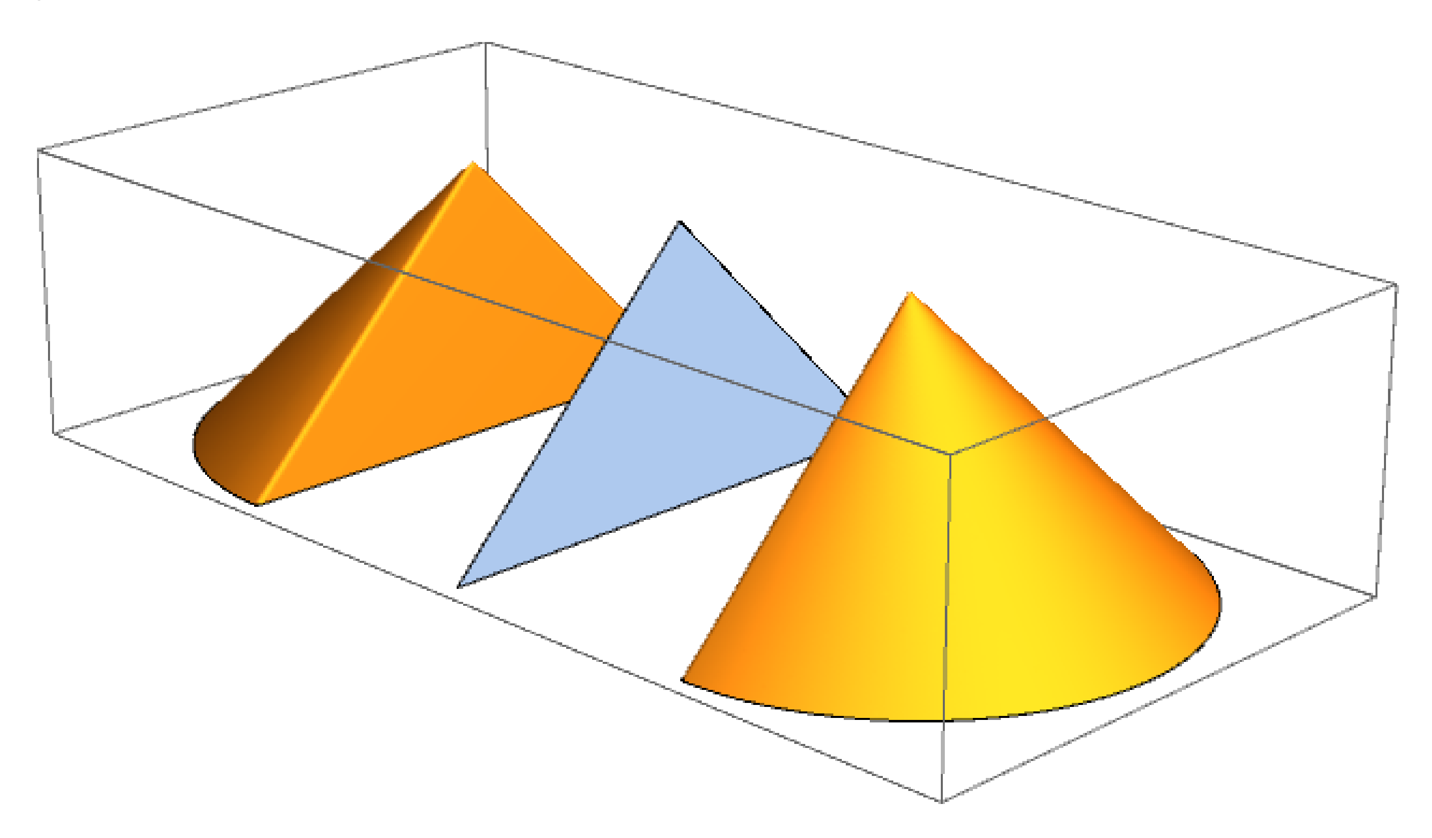
Introducción

Asumiendo que las construcciones con "Regla y Compás" también se pueden realizar en el espacio volumétrico, sabiendo de la existencia del Cono de Apolonio y de la propuesta de resolución de Menecmo; se presenta este procedimiento de resolución al problema de la Duplicación del Cubo, que reza:

<<En el año 429 a. C., Pericles, gobernador de Atenas por esa época, muere víctima de la tifoidea que plagaba la ciudad. A raíz de este suceso algunos de los habitantes deciden ir a la ciudad de Delfos para hacer consultas al Oráculo de Apolo y saber cómo pueden detener la epidemia. La respuesta a la consulta del Oráculo es que debían elaborar un nuevo altar en forma de cubo cuyo volumen duplique el del altar que ya existe.>>



Por lo que se trabajará en la sección vertical de un cono cortado por la mitad antes de volver al espacio tridimensional para realizar los cortes finales.



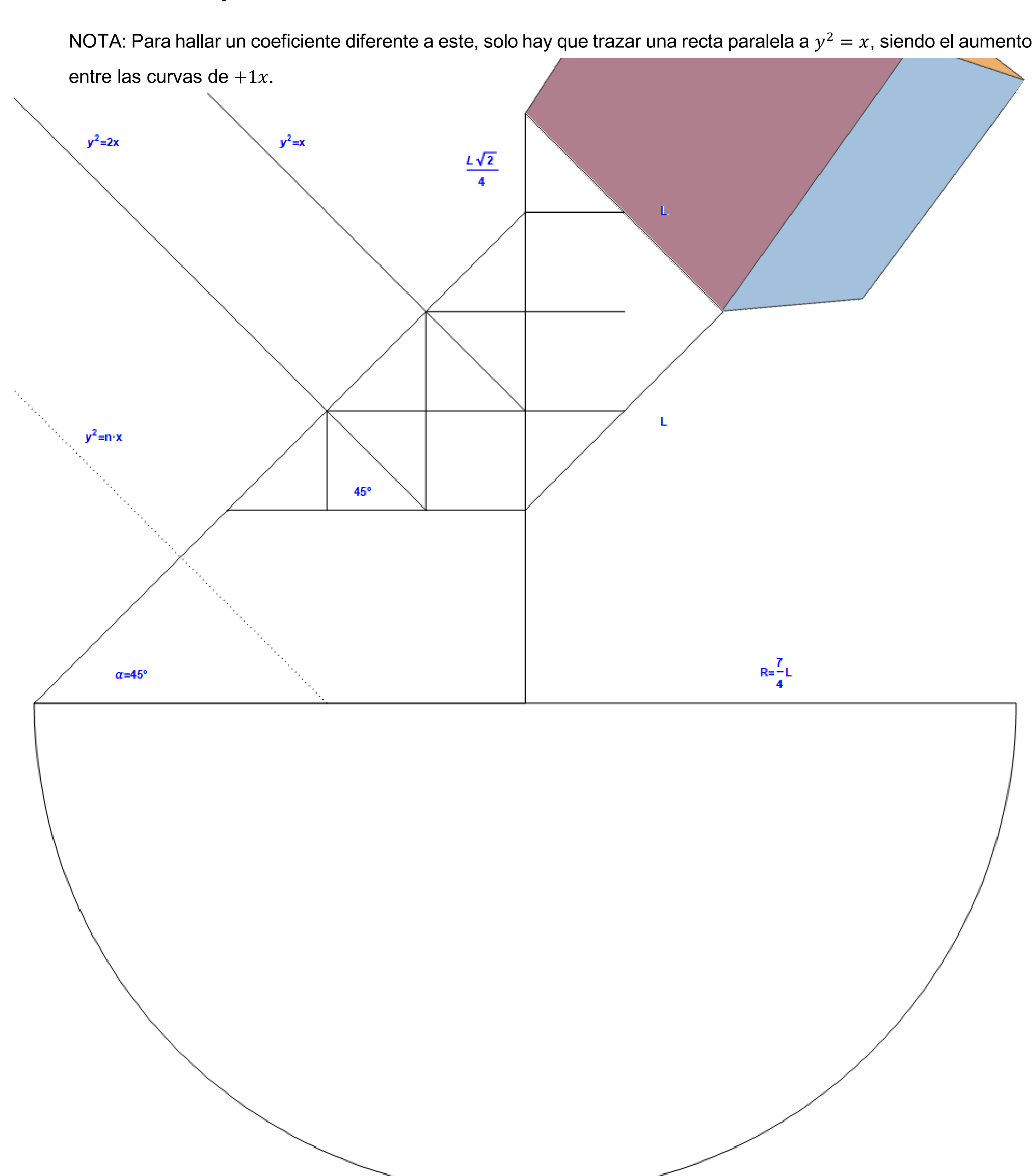
Demostración Geométrica

Tomando la arista del cubo inicial, cuya longitud es “L”; se consigue un cono con altura y radio: $h = R = \left(\frac{7}{4}\right)"L"$ y se corta verticalmente por la mitad.

Tomando una de las mitades del cono, sobre el plano vertical, se halla la diagonal de un cuadrado con arista “L” y se toman $\left(\frac{3}{4}\right)$ partes de la diagonal; que midiendo desde la cúspide del cono, se traza una cuadrícula 3x3 espaciada a: $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)"L"$.

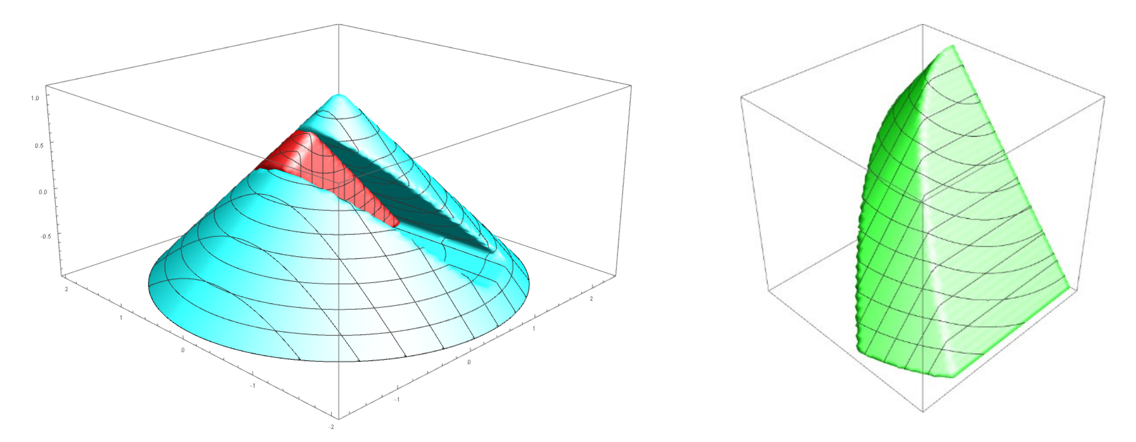
Finalmente, se trazan rectas perpendiculares a la generatriz del cono, acotando su tercio intermedio como se muestra en la imagen.

NOTA: Para hallar un coeficiente diferente a este, solo hay que trazar una recta paralela a $y^2 = x$, siendo el aumento entre las curvas de $+1x$.

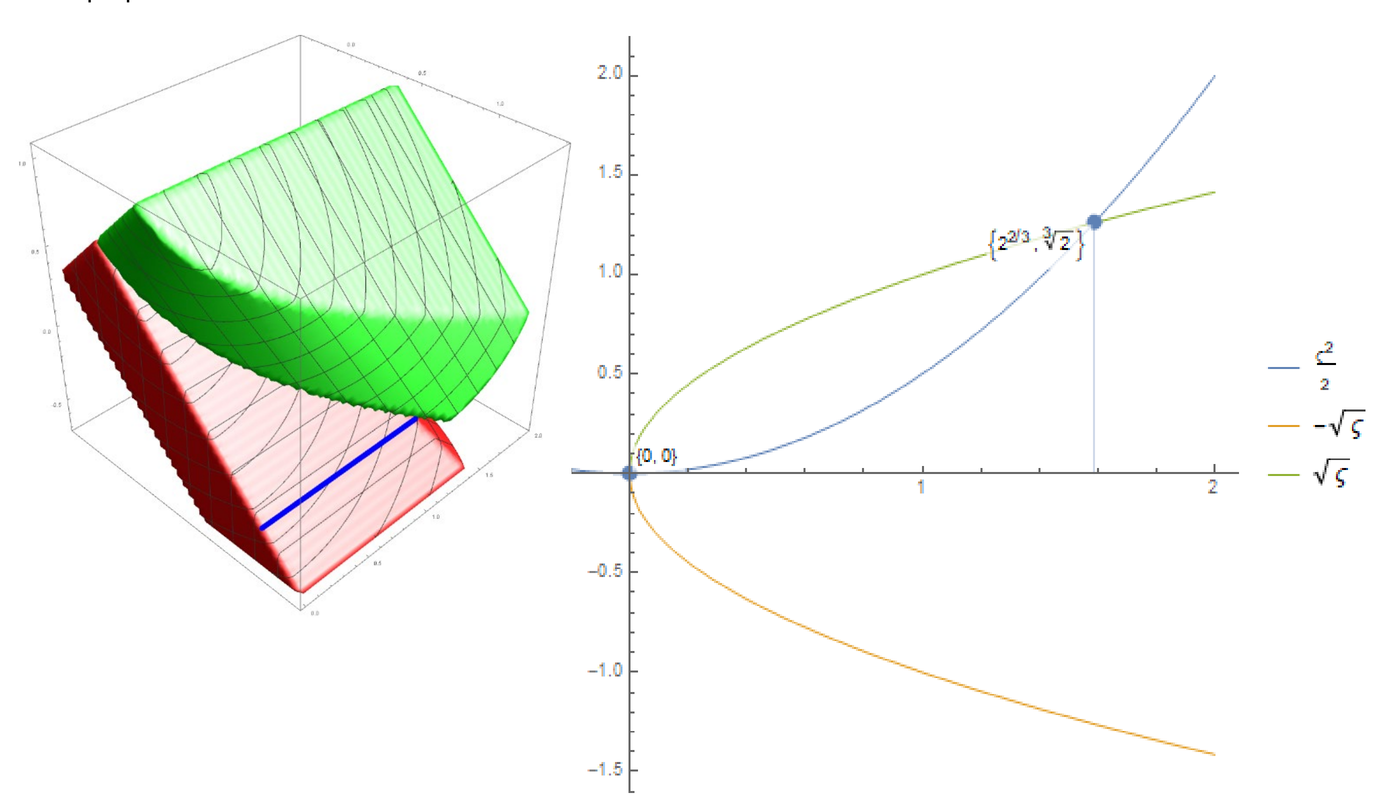


Volviendo al espacio, las rectas pasan a ser planos de corte inclinados a 45º respecto al plano XY; para mayor facilidad en la demostración analítica, se traslada el conjunto haciendo que la cúspide quede en el punto $(cx \quad cy \quad cz)$.

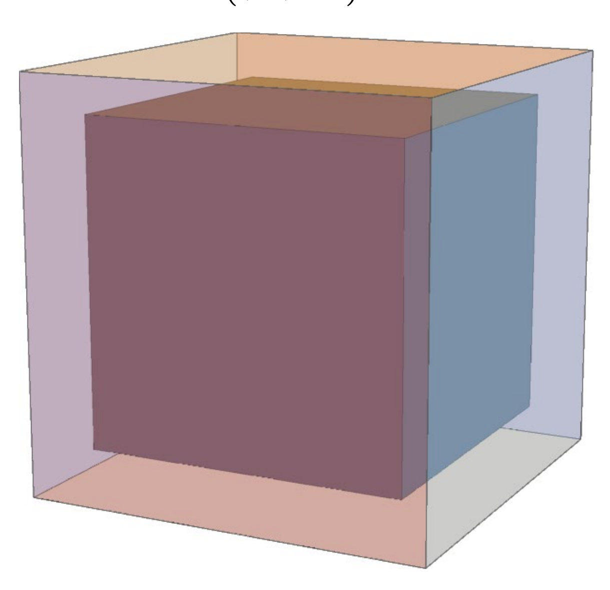
Y para completar el Cono, la otra mitad que se apartó es imagen especular de la que se ha tratado anteriormente.



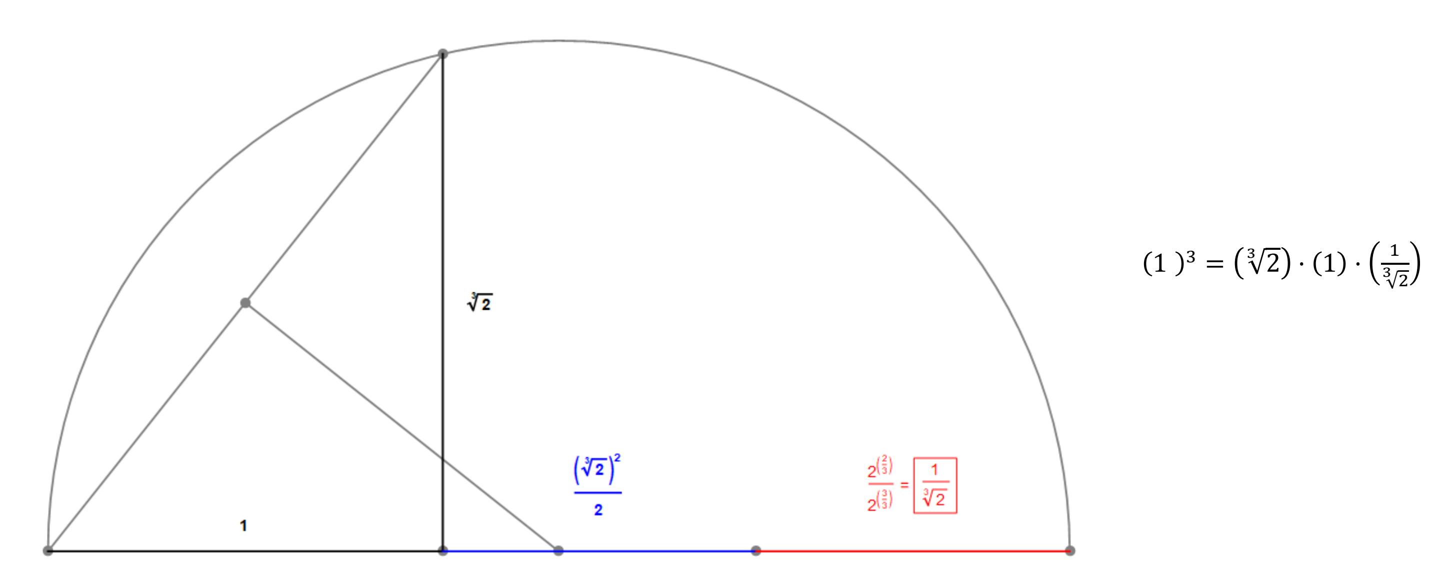
Se superponen las secciones como se muestra a continuación.



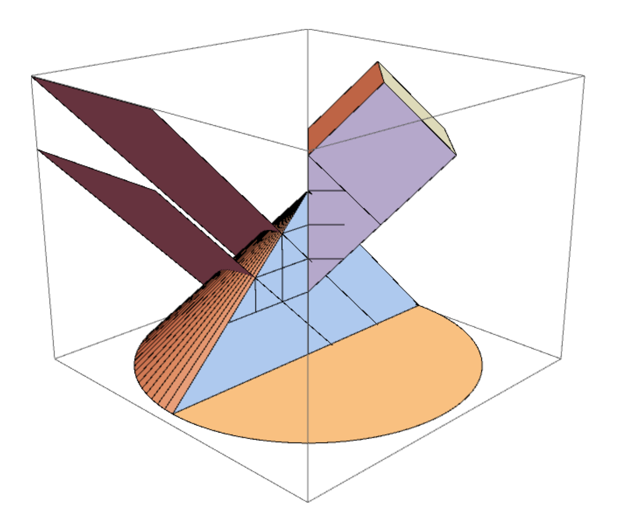
Luego $("L")^3 \Longrightarrow \left(\left(\sqrt[3]{2}\right) "L"\right)^3 = 2\ ("L")^3$, se ha duplicado el cubo.



Para hallar la tercera dimensión del cubo unitario, incluyendo $\left(\sqrt[3]{2}\right)$, se procede:



Demostración Analítica



$$Cono: \left(\frac{x-cx}{1}\right)^2+\left(\frac{y-cy}{1}\right)^2-\left(\frac{z-cz}{1}\right)^2=0$$

$$Cúspide: (cx \quad cy \quad cz)=\left(\left(\frac{1\sqrt{2}}{4}\right)"L" \quad 0 \quad \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)"L"\right)$$

$$Planos\ de\ corte: x+z=\left(\frac{(4-2\cdot n)\cdot\sqrt{2}}{4}\right)"L": n=\{1,2\}$$

$$[Mat.Rot.][\theta]=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & 0 & \sin(\theta)\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta)\end{pmatrix}$$

$$[Traslación][n]=\left(n\cdot("L")\right)\cdot\sqrt{2\left(\left(\frac{(n-1)\cdot\sqrt{2}}{4}\right)"L"\right)^2}: n=\{1,2\}$$

Se halla la primera parábola tomando los datos de: Cono, Cúspide y Plano de corte para n = 1, además de la matriz de rotación para volver a coordenadas canónicas y la traslación para situar el vértice en el origen de coordenadas.

$$Superficies\ Parábola\ 1\begin{cases}\left(\frac{x-\left(\left(\frac{1\sqrt{2}}{4}\right)"L"\right)}{1}\right)^2+\left(\frac{y-(0)}{1}\right)^2-\left(\frac{z-\left(\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)"L"\right)}{1}\right)^2=0\\ x+z=\left(\frac{(4-2\cdot(1))\cdot\sqrt{2}}{4}\right)\Rightarrow z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-x\\ \left(\left(\frac{("L")}{2}\right) \quad y \quad \left(\frac{("L")}{2}\right)-x\cdot\sqrt{2}\right)\begin{cases}z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-x\\ (x \quad y \quad z)[Mat.Rot.][-45°]\end{cases}\\ [Traslación][1]=0\cdot("L")^2\end{cases}$$

- Intersección de Cono y Plano de Corte:

$$y^2-x\cdot("L")\cdot\sqrt{2}=0\begin{cases}\left(x-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}("L")\right)\right)^2+(y)^2-\left(z-\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}("L")\right)\right)^2=0\\ z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-x\end{cases}$$

- Rotación:

$$\left(\left(\frac{("L")}{2}\right) \quad y \quad \left(\frac{("L")}{2}\right)-x\cdot\sqrt{2}\right)\Rightarrow z=(x)-\left(x\cdot\sqrt{2}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(x\cdot\sqrt{2}\right)=(x-z)$$

- Traslación:

$$[Traslación][1]=0\cdot("L")^2=0$$

- Sustitución:

$$y^2=("L")\cdot(x-z)\begin{cases}y^2-x\cdot("L")\cdot\sqrt{2}=0\\ \left(x\cdot\sqrt{2}\right)=(x-z)\end{cases}$$

$$y^2=("L")\cdot(x-z)-0=\boxed{y^2=("L")\cdot(x-z)}$$

Se halla la segunda parábola de manera análoga a la primera, pero con n = 2 para el Plano de corte; aunque en las transformaciones posteriores se toma el Plano de corte de la primera parábola para así estar bajo el mismo sistema de referencia y facilitar cálculos sucesivos.

$$Superficies\ Parábola\ 2\begin{cases}\left(\dfrac{x-\left(\left(\frac{1\sqrt{2}}{4}\right)"L"\right)}{1}\right)^2+\left(\dfrac{y-(0)}{1}\right)^2-\left(\dfrac{z-\left(\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)"L"\right)}{1}\right)^2=0\\ x+z=\left(\dfrac{(4-2\cdot(2))\cdot\sqrt{2}}{4}\right)\Rightarrow z=(0)-x\\ \left(\left(\dfrac{("L")}{2}\right)\quad y\quad \left(\dfrac{("L")}{2}\right)-x\cdot\sqrt{2}\right)\begin{cases}z=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)-x\\ (x\quad y\quad z)[Mat.Rot.][-45°]\end{cases}\\ [Traslación][2]=("L")^2\end{cases}$$

- Intersección de Cono y Plano de Corte:

$$y^2-("L")\cdot\left(("L")+2x\cdot\sqrt{2}\right)=0\begin{cases}\left(x-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}("L")\right)\right)^2+(y)^2-\left(z-\left(\dfrac{3}{2\sqrt{2}}("L")\right)\right)^2=0\\ z=(0)-x\end{cases}$$

- Rotación:

$$\left(\left(\frac{("L")}{2}\right)\quad y\quad\left(\frac{("L")}{2}\right)-x\cdot\sqrt{2}\right)\Rightarrow z=(x)-\left(x\cdot\sqrt{2}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\left(x\cdot\sqrt{2}\right)=(x-z)$$

- Traslación:

$$[Traslación][2]=("L")^2$$

- Sustitución:

$$y^2=("L")^2+("L")\cdot 2(x-z)\begin{cases}y^2-("L")\cdot\left(("L")+2x\cdot\sqrt{2}\right)=0\\ \left(x\cdot\sqrt{2}\right)=(x-z)\end{cases}$$
$$y^2=("L")^2+("L")\cdot 2(x-z)-("L")^2=\boxed{y^2=("L")\cdot 2(x-z)}$$

Para mayor facilidad de visualización y cálculo, se hace la sustitución $(x-z)=\varsigma$.

$$\begin{matrix}\boxed{y^2=("L")\cdot\varsigma}\\ \boxed{y^2=("L")\cdot 2\varsigma}\end{matrix}\begin{cases}y^2=("L")\cdot(x-z)\\ y^2=("L")\cdot 2(x-z)\\ \varsigma=(x-z)\end{cases}$$

Se refleja la segunda parábola con la recta bisectriz de los Ejes ς e Y. (Intercambio de variables)

$$\begin{matrix}y^2=("L")\cdot 2\varsigma\\ \Downarrow\\ (\varsigma\quad y)[Mat.Ref.]=(y\quad\varsigma)\\ \Downarrow\\ \boxed{(\varsigma)^2=("L")\cdot 2(y)}\end{matrix}\begin{cases}y^2=("L")\cdot 2\varsigma\\ [Mat.Ref.]=\begin{pmatrix}\cos(2\cdot 45°) & \sin(2\cdot 45°)\\ \sin(2\cdot 45°) & -\cos(2\cdot 45°)\end{pmatrix}\end{cases}$$

Se resuelve el sistema de ecuaciones que forman las dos parábolas.

$$\sqrt{("L")\cdot\varsigma} = \frac{\varsigma^2}{2("L")}\begin{cases} y^2 = ("L")\cdot\varsigma \\ \varsigma^2 = ("L")\cdot 2y \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

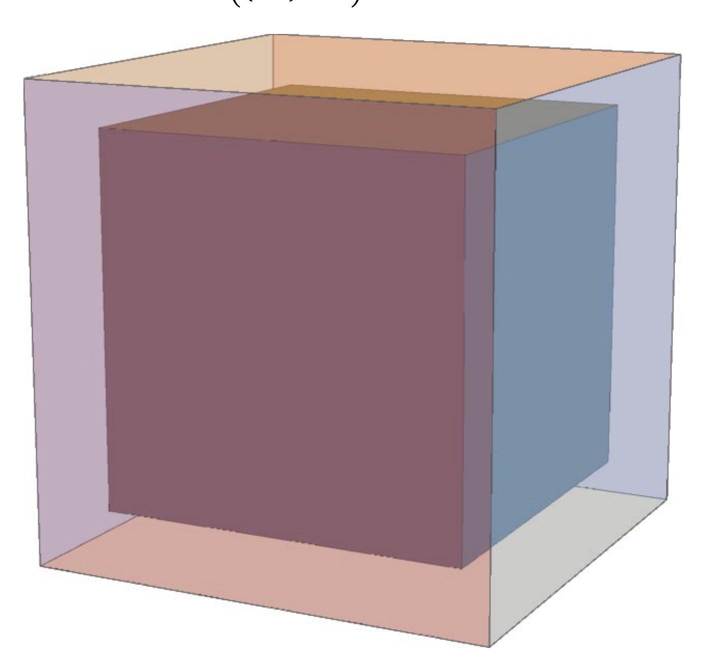
$$2("L")^{\left(\frac{3}{2}\right)} = (\varsigma)^{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varsigma = ("L")\cdot(2)^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$$

$$\boxed{y = ("L")\cdot\sqrt[3]{2}}\begin{cases} \varsigma = ("L")\cdot(2)^{\left(\frac{2}{3}\right)} \\ y = \sqrt{("L")\cdot\varsigma} \end{cases}$$

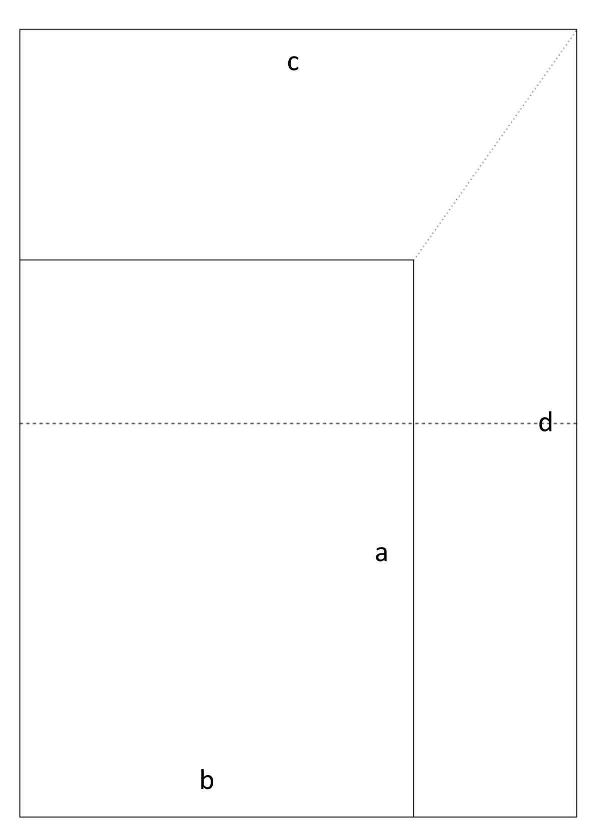
Luego $("L")^3 \Longrightarrow \left(\left(\sqrt[3]{2}\right)"L"\right)^3 = 2\,("L")^3$, se ha duplicado el cubo.



Apilamiento Fractal

Una posible, y muy interesante, aplicación de hallar $\sqrt[3]{2}$ es tener la posibilidad a un formato volumétrico análogo al estándar actual en papel.

Formato de papel



Tamaño Cero

$$\frac{a}{b} = \frac{d}{c}\begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = a \\ d = 2b \end{cases}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2b}{a} \Rightarrow b = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

$$DIN - A0 \begin{cases} \begin{matrix} \left(\frac{a^2}{\sqrt{2}}\right) = 10^6 \\ \Downarrow \\ \boxed{a = \sqrt{10^6 \cdot \sqrt{2}} = 10^3 \cdot \sqrt[4]{2}\ mm} \end{matrix} & \begin{cases} a \cdot b = (10^3)^2 \\ a = 1 \\ b = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \\ \boxed{b = \left(\frac{\left(10^3 \cdot \sqrt[4]{2}\right)}{\sqrt{2}}\right) = \frac{10^3}{\sqrt[4]{2}}\ mm} & \begin{cases} a = 10^3 \cdot \sqrt[4]{2} \\ b = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right) \end{cases} \end{cases}$$

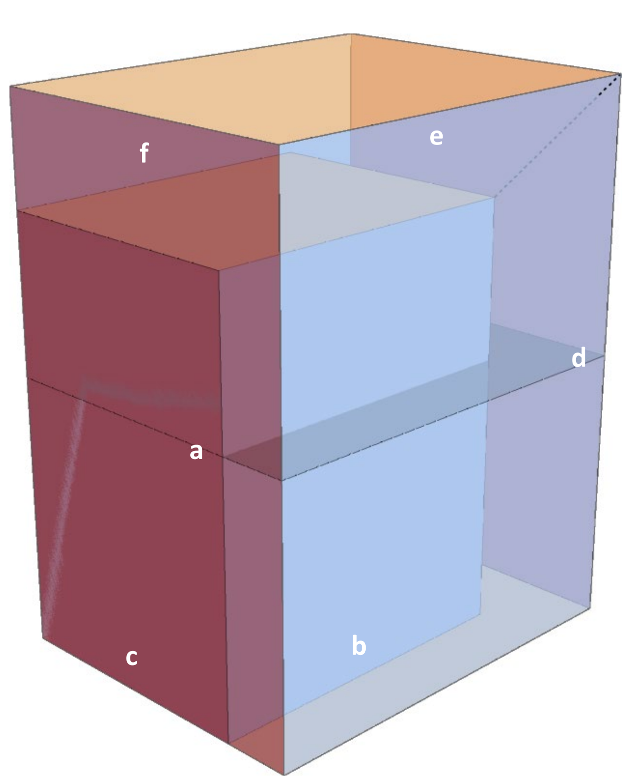
Tamaños Escalados

$$\frac{b}{c} = \frac{a}{d}\begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = a \\ d = 2b \end{cases}$$

$$\frac{\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)}{a} = \frac{a}{2\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{DIN - A(k_{DA}) = DIN - A0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k_{DA}}}$$

Formato Volumétrico



Tamaño Cero

$$\frac{d}{a}=\frac{e}{b}=\frac{f}{c}\begin{cases}a=a\\b=b\\c=c\\d=2c\\e=a\\f=b\end{cases}$$

$$\frac{2c}{a}=\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{2c}{a}=\frac{a}{b}\parallel\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$$
$$\Downarrow$$
$$2c=\left(\frac{a^2}{b}\right)\parallel c=\left(\frac{b^2}{a}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$2\left(\frac{b^2}{a}\right)=\left(\frac{a^2}{b}\right)\Rightarrow a=\sqrt[3]{2\cdot b^3}\Rightarrow a=b\cdot\sqrt[3]{2}$$

$$VOL-A0\begin{cases}\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)^3=10^9 \\ \Downarrow \\ \boxed{a=\sqrt[3]{10^9\cdot 2}=10^3\cdot\sqrt[3]{2}\,mm}\begin{cases}a\cdot b\cdot c=(10^3)^3\\a=b\cdot\sqrt[3]{2}\\c=\frac{b^2}{(b\cdot\sqrt[3]{2})}=\left(\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right)\begin{cases}a=b\cdot\sqrt[3]{2}\\c=\left(\frac{b^2}{a}\right)\end{cases}\end{cases}\\ \boxed{b=\left(\frac{(10^3\cdot\sqrt[3]{2})}{\sqrt[3]{2}}\right)=10^3\cdot 1\,mm}\begin{cases}a=10^3\cdot\sqrt[3]{2}\\b=\left(\frac{a}{\sqrt[3]{2}}\right)\end{cases}\\ \boxed{c=\left(\frac{(10^3\cdot 1)}{\sqrt[3]{2}}\right)=\frac{10^3}{\sqrt[3]{2}}\,mm}\begin{cases}b=10^3\cdot 1\\c=\left(\frac{b}{\sqrt[3]{2}}\right)\end{cases}\end{cases}$$

Tamaños Escalados

$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}\begin{cases}a=a\\b=b\\c=c\\d=2c\\e=a\\f=b\end{cases}$$

$$\frac{a}{2c}=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{(b\cdot\sqrt[3]{2})}{2\left(\frac{b^2}{(b\cdot\sqrt[3]{2})}\right)}=\frac{b}{(b\cdot\sqrt[3]{2})}=\frac{\left(\frac{b^2}{(b\cdot\sqrt[3]{2})}\right)}{b}$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

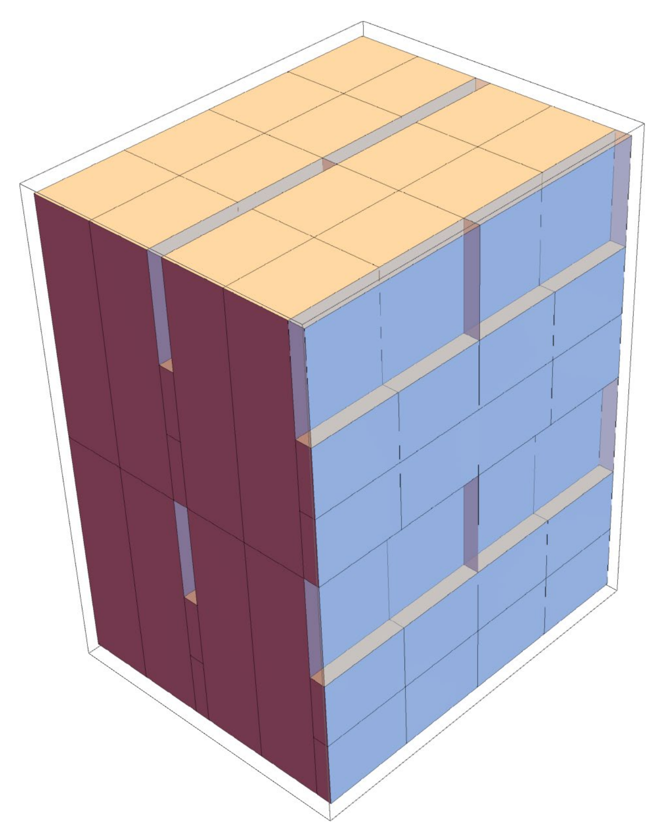
$$\boxed{VOL-A(k_{VA})=VOL-A0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{k_{VA}}}$$

A continuación, se recopilan las dimensiones para los formatos de uso común 2D y 3D.

$$Teselaciones\ Fractales\ 2D\ y\ 3D\begin{cases} DIN-A4\begin{cases} a=\left(10^3\cdot\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{(4)}=10^3\cdot(2)^{\left(\frac{7}{4}\right)}\approx 297\ mm \\ b=\left(\frac{10^3}{\sqrt[4]{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{(4)}=10^3\cdot(2)^{\left(-\frac{9}{4}\right)}\approx 210\ mm \end{cases} \\ VOL-A4\begin{cases} a=\left(10^3\cdot\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{(4)}=10^3\cdot(2)^{(-1)}\approx 500\ mm \\ b=\left(10^3\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{(4)}=10^3\cdot(2)^{\left(-\frac{4}{3}\right)}\approx 396\ mm \\ c=\left(\frac{10^3}{\sqrt[3]{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{(4)}=10^3\cdot(2)^{\left(-\frac{5}{3}\right)}\approx 314\ mm \end{cases} \end{cases}$$

Apilamiento volumétrico de DIN

Se iguala la dimensión mayor de 2D con la dimensión intermedia de 3D, para lograr el máximo empaquetamiento posible entre las formas.



$$b_{[VOL-A(k_{VA})]}=a_{[DIN-A(k_{DA})]}\begin{cases} a_{[DIN-A(k_{DA})]}=\left(10^3\cdot\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k_{DA}} \\ b_{[VOL-A(k_{VA})]}=\left(10^3\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{k_{VA}} \end{cases}$$

$$\left(10^3\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{k_{VA}}=\left(10^3\cdot\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k_{DA}}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{k_{VA}}=\left(\sqrt[4]{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{k_{DA}}$$

$$\Downarrow$$

$$(2)^{\left(-\frac{k_{VA}}{3}\right)}=(2)^{\left(\frac{1}{4}+\left(-\frac{k_{DA}}{2}\right)\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$k_{VA}=\left(\frac{6\cdot k_{DA}-3}{4}\right)$$

$$\boxed{VOLDIN-A(k_{VA})=VOL-A0\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\left(\frac{6\cdot k_{DA}-3}{4}\right)}}$$

Dimensiones del cuboide ajustado a DIN-A4

$$VOLDIN-A4\begin{cases} a=\left(10^3\cdot\sqrt[3]{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\left(\frac{6\cdot(4)-3}{4}\right)}=10^3\cdot(2)^{\left(-\frac{17}{12}\right)}\approx 375\ mm \\ b=\left(10^3\cdot 1\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\left(\frac{6\cdot(4)-3}{4}\right)}=10^3\cdot(2)^{\left(-\frac{7}{4}\right)}\approx 297\ mm \\ c=\left(\frac{10^3}{\sqrt[3]{2}}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\left(\frac{6\cdot(4)-3}{4}\right)}=10^3\cdot(2)^{\left(-\frac{25}{12}\right)}\approx 236\ mm \end{cases}$$

Referencias

- ✓ http://es.wikipedia.org/
- ✓ http://udmatematicas.blogspot.com/2007/06/la-duplicacion-del-volumen-del-cubo.html
- ✓ https://math.stackexchange.com/questions/2822566/a-cuboid-that-can-be-bisected-into-two-cuboids-all-three-being-similar-sides-r
- ✓ http://mathworld.wolfram.com/DelianConstant.html